



责任编辑：张 晨
封面设计：全品视觉组

全品高考

第二轮专题

AI智慧教辅

???

解一元二次不等式实际上就是求出对应的一元二次方程的实数根（如果有实数根）再结合对应的函数的图像确定其大于零或者小于零的区间在含有字母参数的不等式中还要根据参数的不同取值确定方程根的大小以及函数图像的开口方向，从而确定不等式的解集

使 $f(x) > 0$ 的区间为单调递增区间；使 $f(x) < 0$ 的区间为单调递减区间
 $f'(x_0) = 0$ ，且 $f''(x)$ 在 x_0 附近左负（正）右正（负），则 x_0 为极小（大）值点

常用逻辑用语：原命题与逆命题、否命题与逆否命题互逆
原命题与否命题、逆命题与逆否命题互否
原命题与逆否命题、否命题与逆命题互为逆否，互为逆否的命题等价

偶函数在定义域内关于坐标原点对称的区间上具有相反的单调性、奇函数在定义域内关于坐标原点对称的区间上具有相同的单调性

$y = f(x)$ 的图像平移
 ϕ 得 $y = f(x + \phi)$ 的图像
 $\phi > 0$ 向左， $\phi < 0$ 向右

$y = f(x)$ 的图像平移 k 得 $y = f(x) + k$ 的图像， $k > 0$ 向上， $k < 0$ 向下

二元一次不等式 $Ax + By + C > 0$ 的解集是平面直角坐标系中表示直线 $Ax + By + C = 0$ 某一侧所有点组成的平面区域
二元一次不等式组的解集是指各个不等式解集所表示的平面区域的公共部分

把 $y = f(x)$ 图像各点的纵坐标变为原来的 λ 倍
得 $y = \lambda f(x)$ 的图像

主编 肖德好

$y = f(x)$ 图像关于点 (a, b) 对称的图像的解析式是
 $y = 2b - f(2a - x)$

偶函数在定义域内关于坐标原点对称的区间上具有相反的单调性、奇函数在定义域内关于坐标原点对称的区间上具有相同的单调性，使 $f''(x) > 0$ 的区间为单调递增区间；使 $f''(x) < 0$ 的区间为单调递减区间。

本书为AI智慧教辅

“讲题智能体”支持学生聊着学，扫码后哪题不会选哪题；随时随地想聊就聊，想问就问。



服务热线 400-0555-100

云发改价格审[2025]012



绿色印刷产品



定价：40.28元
(含特色专项、短平快)

CONTENTS



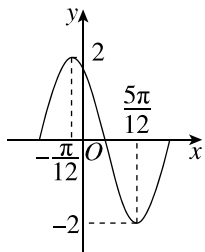
限时集训(一)	微专题 1 三角恒等变换与三角函数的性质和图象	091
限时集训(二)	微专题 2 平面向量及其应用	093
限时集训(三)	微专题 3 解三角形	094
专题综合训练(一)		096
限时集训(四)	微专题 4 等差数列、等比数列	098
限时集训(五)	微专题 5 求数列的通项公式	100
限时集训(六)	微专题 6 数列求和	102
专题综合训练(二)		104
限时集训(七)	微专题 7 简单几何体的结构特征、表面积、体积	106
限时集训(八)	微专题 8 空间直线、平面的位置关系	108
限时集训(九)	微专题 9 空间角度与距离的计算	110
专题综合训练(三)		112
限时集训(十)	微专题 10 排列组合与二项式定理	114
限时集训(十一)	微专题 11 概率	115
限时集训(十二)	微专题 12 离散型随机变量的分布列及数字特征	117
限时集训(十三)	微专题 13 统计与成对数据的统计分析	119
专题综合训练(四)		122
限时集训(十四)	微专题 14 直线与圆	125
限时集训(十五)	微专题 15 圆锥曲线的定义与几何性质	127
限时集训(十六)	微专题 16 直线与圆锥曲线的位置关系	129
限时集训(十七)	微专题 17 圆锥曲线的综合问题	131
专题综合训练(五)		133
限时集训(十八)	微专题 18 函数的图象与性质	135
限时集训(十九)	微专题 19 应用导数求解函数问题	137
限时集训(二十)	微专题 20 零点问题	139
限时集训(二十一)	微专题 21 利用导数求解不等式问题	141
专题综合训练(六)		143

一、单项选择题

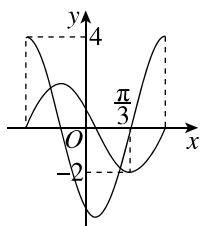
1. 想要得到函数 $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,只需要将 $y = \sin 3x$ 的图象 ()
- A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度
D. 向右平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度
2. [2025·全国一卷] 已知点 $(a, 0) (a > 0)$ 是函数 $y = 2\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象的一个对称中心,则 a 的最小值为 ()
- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{4\pi}{3}$
3. [2021·全国甲卷] 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 则 $\tan \alpha =$ ()
- A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$
4. [2025·甘肃白银一模] 已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) =$ ()
- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$
C. $\frac{7}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$
5. [2023·全国乙卷] 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 单调递增, 直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y = f(x)$ 的图象的两条对称轴, 则 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) =$ ()
- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
6. [2025·湖南长沙模拟] 若关于 x 的方程 $\cos 2x - m \sin x = 0$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 上有 2 个实根, 则 m 的取值范围是 ()
- A. $(-1, 0)$ B. $[-1, 0]$
C. $(0, 1)$ D. $[0, 1]$
7. [2025·四川成都模拟] 函数 $f(x) = |2x - 3| - 8\sin \pi x (x \in \mathbf{R})$ 的所有零点之和为 ()
- A. 9 B. 10
C. 11 D. 12
8. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$, T 为 $f(x)$ 的最小正周期, 且 $f(x) \leq \left|f\left(\frac{5}{12}T\right)\right|$ 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 恒成立, 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恰有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是 ()
- A. $\left[\frac{14}{3}, \frac{20}{3}\right)$ B. $\left[\frac{20}{3}, \frac{26}{3}\right)$
C. $\left(\frac{20}{3}, \frac{26}{3}\right]$ D. $\left(\frac{14}{3}, \frac{20}{3}\right]$

二、多项选择题

9. [2025·广西柳州模拟] 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图所示, 则 ()



- A. $\omega = 2$
 B. $\varphi = \frac{\pi}{3}$
 C. 直线 $x = \frac{17\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴
 D. $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上的取值范围为 $[-1, 2]$
10. [2025·宁夏石嘴山模拟] 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1$, 则 ()
- A. 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$
 B. 函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{3\pi}{8}, 0)$
 C. 函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$ 上单调递减
 D. 函数 $f(x)$ 的图象可由 $y = \sqrt{2} \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到
11. [2025·海南海口模拟] 已知函数 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$), 若函数 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示(横、纵轴的单位长度不同), 则下列结论正确的是 ()



- A. $f(x) = f(x + \pi)$
 B. $f'(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称
 C. $f(x) + f'(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$
 D. 当 $x \in (0, 2\pi)$ 时, 函数 $F(x) = f(x) + 2f(2x + \frac{\pi}{12})$ 有 4 个零点

三、填空题

12. [2024·全国甲卷] 函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值是_____.
13. [2025·山东青岛模拟] 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$. 若 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上的取值范围为 $[1, \frac{3}{2}]$, 则 m 的取值范围为_____.
14. [2024·新课标II卷] 已知 α 为第一象限角, β 为第三象限角, $\tan \alpha + \tan \beta = 4$, $\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____.

一、单项选择题

- [2025·广东惠州模拟] 已知向量 a, b 满足 $|a| = 4, |b| = 2, a$ 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $|a-b| =$ ()
A. 2 B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{5}$
- [2024·新课标I卷] 已知向量 $a = (0, 1), b = (2, x)$, 若 $b \perp (b-4a)$, 则 $x =$ ()
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
- [2025·湖南永州模拟] 已知 $\langle a, c \rangle = 60^\circ, |a| = 3, |c| = 2$, 则 $a \cdot c$ 与 a 在 c 上的投影向量的长度的比值为 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- [2023·新课标I卷] 已知向量 $a = (1, 1), b = (1, -1)$. 若 $(a + \lambda b) \perp (a + \mu b)$, 则 ()
A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda\mu = 1$ D. $\lambda\mu = -1$
- [2025·内蒙古鄂尔多斯三模] 已知 a, b 是夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的两个单位向量, 且 $\overrightarrow{OA} = a + b, \overrightarrow{OB} = 2a + 3b, \overrightarrow{OC} = 3a + mb$, 若 A, B, C 三点共线, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} =$ ()
A. 10 B. 12 C. 14 D. 16
- [2025·广东东莞模拟] 边长为1的正方形内有一个内切圆, MN 是内切圆的一条弦, 点 P 为正方形四条边上的动点, 则当弦 MN 的长度最大时, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最大值是 ()
A. $-\frac{1}{4}$ B. 0 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$
- [2025·内蒙古呼和浩特模拟] 已知平面向量 a, b 满足 $|a-b| = 1, b = (1, \sqrt{3})$, 则 $\langle a, b \rangle$ 的取值范围为 ()
A. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ B. $[0, \frac{\pi}{6}]$ C. $[0, \frac{\pi}{3}]$ D. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$
- [2025·甘肃酒泉模拟] 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中

点, 连接 DE 并延长到点 F , 使得 $DE = \frac{1}{3}EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $-\frac{5}{8}$ D. $\frac{11}{8}$

二、多项选择题

- [2025·河北石家庄模拟] 已知向量 a, b 满足 $|a| = 2|b| = 2$, 且向量 a, b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则下列说法正确的是 ()
A. $|a+2b| = 2\sqrt{5}$ B. $(a-4b) \perp a$ C. 向量 $a-2b$ 和 a 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$ D. 若 $(\lambda a + 2b) \parallel (a - 3b)$, 则 $\lambda = -\frac{2}{3}$
- [2025·湖北黄冈模拟] 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AB \perp BC, BC = 2AB = 2AD = 4$, E 为 BC 的中点, 则 ()
A. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$ B. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$ C. $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{5}$ D. $(2\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB}) \perp \overrightarrow{AC}$
- [2025·福建南平三模] 已知向量 a, b 满足 $|a| = 1, |b| = 2$, 则 ()
A. 当 $a \cdot b = -1$ 时, a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ B. 当 $|a-b| = 2$ 时, a 在 b 上的投影向量为 $\frac{1}{8}b$ C. $|a+b| + |a-b|$ 的最大值为 $2\sqrt{5}$ D. $|a+b| + |a-b|$ 的最小值为 4

三、填空题

- [2023·新课标II卷] 已知向量 a, b 满足 $|a-b| = \sqrt{3}, |a+b| = |2a-b|$, 则 $|b| =$ _____.
- [2025·广东佛山三模] 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2AD = 4$, 以 A 为圆心的圆与 BD 相切于点 P , 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.
- [2025·天津卷] 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 AB 边的中点, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b$, 则 $\overrightarrow{AE} =$ _____ (用 a, b 表示); 若 $|\overrightarrow{AE}| = 5, AE \perp CB$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} =$ _____.

1. [2023·新课标I卷] 已知在 $\triangle ABC$ 中, $A+B=3C$, $2\sin(A-C)=\sin B$.

(1)求 $\sin A$;

(2)设 $AB=5$,求 AB 边上的高.

2. [2025·海南儋州模拟] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ,已知 $c=b\cos A$.

(1)求 B ;

(2)若 $b=2$,且 $\triangle ABC$ 的面积为1,求 $\triangle ABC$ 的周长.

3. [2025·广西柳州模拟] 记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c ,已知 $2b=c+2a\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求 A ;

(2)若 $a=2\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, D 为 BC 上一点, AD 平分 $\angle BAC$,求 AD .

4. [2025·甘肃白银模拟] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $3a - c = 3b \cos C$.

(1)求 $\sin B$.

(2)已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$.

(i)若 $a + c = \sqrt{3}b$,求 $\triangle ABC$ 的周长;

(ii)设 AC 的中点为 D ,求 BD 的最小值.

5. [2025·福建漳州模拟] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\sqrt{2}b = 2(c - a \cos B)$.

(1)求 A ;

(2)已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}$, D 为 BC 的中点,

$AD = \sqrt{3}$,求 a .

6. [2025·甘肃白银三模] 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $c = 4$,

$$\frac{\sqrt{3}a}{b} = \frac{1 + \cos A}{\sin B}.$$

(1)求 A ;

(2)若 $C = \frac{\pi}{4}$,求 $\triangle ABC$ 的周长;

(3)求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

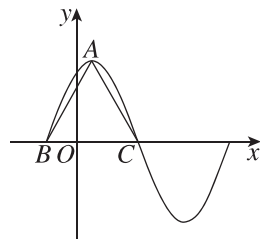
一、单项选择题

- [2025·湖南长沙模拟] 将函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{2\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi > 0)$ 个单位长度后, 所得图象对应的函数为奇函数, 则 φ 的最小值为 ()
A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{7\pi}{12}$
- [2025·福建漳州模拟] 已知平面内三点 $A(1, 0), B(0, 1), C(2, 3)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量为 ()
A. $(\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{6}{\sqrt{10}})$ B. $(2, 6)$
C. $(\frac{1}{10}, \frac{3}{10})$ D. $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$
- [2025·江苏盐城模拟] 若函数 $f(x) = \tan(\omega x + \varphi)(\omega > 0, \varphi > 0)$ 的图象与直线 $y = a$ 的两个相邻交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且 $f(x + \frac{\pi}{12})$ 为奇函数, 则 φ 的最小值为 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
- [2025·河北邢台二模] 已知 $\alpha \in [\pi, \frac{5\pi}{4}], \beta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, 且 $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \beta$, 则 $\alpha - \beta =$ ()
A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$
- [2025·湖北武汉模拟] 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形, 点 N 在 AC 上且 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$, P 是 BN 上一点且 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} =$ ()
A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{4}{9}$ D. 1
- [2025·广东茂名模拟] 已知 $\sin(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{3}$, 且 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin(\frac{\pi}{6} + x) - \cos(\frac{2\pi}{3} + x)$ 的值为 ()
A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. 0 D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

- [2025·北京卷] 设函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x$ ($\omega > 0$), 若 $f(x + \pi) = f(x)$ 恒成立, 且 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上存在零点, 则 ω 的最小值为 ()
A. 8 B. 6
C. 4 D. 3
- [2024·全国甲卷] 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = 60^\circ, b^2 = \frac{9}{4}ac$, 则 $\sin A + \sin C =$ ()
A. $\frac{3}{2}$ B. $\sqrt{2}$
C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、多项选择题

- [2025·黑龙江哈尔滨模拟] 已知向量 e_1, e_2 为平面 α 内的两个单位向量, 且 $|e_1 + 2e_2| = \sqrt{3}$, 则下列说法中正确的有 ()
A. e_1 在 e_2 上的投影向量为 $\frac{1}{2}e_2$
B. $|2e_1 - 3e_2| = \sqrt{19}$
C. $e_1 + e_2$ 与 $e_1 - e_2$ 可以构成表示平面 α 内所有向量的一个基底
D. $e_1 \perp (e_1 + 2e_2)$
- [2025·山东泰安模拟] 函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin(\omega x + \varphi)(\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 在一个周期内的图象如图所示, A 为图象的最高点, B, C 为图象与 x 轴的交点, 点 $B(-\frac{4}{3}, 0)$, 且 $\triangle ABC$ 为正三角形, 则下列说法正确的是 ()
A. $\omega = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{3}$
B. 当 $x \in (0, 2)$ 时, 函数 $f(x)$ 的取值范围为 $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$
C. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{4}{3}$ 个单位长度后得到一个偶函数的图象
D. 若 $f(x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{5}$, 且 $x_0 \in (-\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$, 则 $\cos(\frac{\pi}{2}x_0 + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{7}{25}$



11. [2025·湖南长沙模拟] 如图,在 $\triangle ABC$ 中,
 $BC=4$, D 为 BC 边(不包含 B,C)上的点,
 $\angle BAD=\alpha$, $\angle CAD=\beta$, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$,则 ()

A. $\triangle ABC$ 外接圆的半径

为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

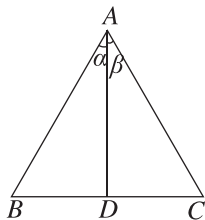
B. 顶点 A 到 BC 的最大距离

为 $2\sqrt{3}$

C. 若 D 为 BC 边的中点,则 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}=\frac{AC}{AB}$

D. 若 D 为 BC 边的中点,则 AD 的最大值为

$2\sqrt{3}$



三、填空题

12. 已知向量 a, b 满足 $|a|=1, |b|=2, |a+b|=\sqrt{5}$,则 $\langle a, b \rangle =$ _____.

13. [2025·北京大兴区三模] 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \omega x$ ($\omega \in \mathbf{R}$), $f(x_1) = 0$,
 $f(x_2) = \sqrt{3}$,且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$,则
 $f(0) =$ _____, $\omega =$ _____.

14. 一条直线上有三点 A, B, C ,点 C 在点 A 与点 B 之间, P 是此直线外一点, $\angle APC = 30^\circ$,
 $\angle BPC = 60^\circ$, $PA = 4$, $PB = 8$,则 $PC =$ _____.

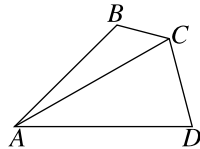
四、解答题

15. [2025·湖北武汉模拟] 已知 $\triangle ABC$ 的面积为
 $5\sqrt{3}$, O 为边 BC 的中点, $OA=5, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 5$.
 (1)求 BC 的长;
 (2)求 $\sin C$ 的值.

16. [2025·福建泉州模拟] 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a=1$ 且 $b \cos C + \sqrt{3} c \sin B = a + 2c$.

(1)求 B ;

(2)如图所示, D 为 $\triangle ABC$ 外一点, $\angle DCB = \angle CBA$, $CD = \sqrt{3}$, $AC = AD$,求 D .



一、单项选择题

1. [2024·全国甲卷] 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_5 = S_{10}$, $a_5 = 1$, 则 $a_1 =$ ()

A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{7}{3}$
C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{7}{11}$

2. [2025·江苏南通模拟] 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是公比为 2 的等比数列, 则 $S_{10} =$ ()

A. 93 B. 1023
C. 2047 D. 3069

3. [2025·河南信阳模拟] 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1$, 前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = 14, 3a_1, a_2, -a_3$ 成等差数列, 则 $a_n =$ ()

A. $2 \times 3^{n-1}$ B. 3^n
C. $2 \times (-3)^{n-1}$ D. $(-3)^n$

4. [2025·辽宁鞍山模拟] 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_5 = 6, S_{15} = 78$, 则 $S_{20} =$ ()

A. 144 B. $78\sqrt{13}$
C. 162 D. 240

5. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & n \text{ 为奇数,} \\ a_n + 2, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 则 $a_{2024} =$ ()

A. 5×2^{1011} B. $2^{1013} - 2$
C. $3 \times 2^{1012} - 4$ D. $2^{1012} - 4$

6. [2025·山东泰安模拟] 已知公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_7 = 2, a_9, a_5, a_{13}$ 成等比数列, 则满足 $S_n > 0$ 的 n 的最大值为 ()

A. 8 B. 9
C. 13 D. 14

二、多项选择题

7. [2025·全国二卷] 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, q 为 $\{a_n\}$ 的公比, $q > 0$. 若 $S_3 = 7, a_3 = 1$, 则 ()

A. $q = \frac{1}{2}$ B. $a_5 = \frac{1}{9}$
C. $S_5 = 8$ D. $a_n + S_n = 8$

8. [2025·辽宁锦州模拟] 设首项为 1 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_{n+1} = 2S_n + n - 1$, 则下列结论正确的是 ()

A. $S_2 = 2$
B. 数列 $\{S_n + n\}$ 为等比数列
C. 数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列
D. 数列 $\{S_{n+1} - S_n + 1\}$ 为等比数列

三、填空题

9. [2025·济南模拟] 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 + a_7 = 10, a_5 a_9 = 65$, 则 $\frac{S_n}{n} =$ _____.

10. [2025·浙江绍兴二模] 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 a_5 = 2a_4$, 且 a_3 与 $2a_6$ 的等差中项为 $\frac{5}{4}$, 则 $S_4 =$ _____.

11. [2025·全国一卷] 若一个等比数列的前 4 项和为 4, 前 8 项和为 68, 则该等比数列的公比为 _____.

四、解答题

12. [2022·全国甲卷] 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$.

(1) 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 求 S_n 的最小值.

13. [2025·河北邢台三模] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_2 + a_6 = 14, S_{10} = 100$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 在 $\{a_n\}$ 中是否存在 a_m, a_k, a_p ($m < k < p$) 成等比数列? 若存在, 求出一个这样的 3 项; 若不存在, 请说明理由.

一、单项选择题

1. [2025·福建泉州模拟] 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}(n\geq 2)$, $a_1=2$, 则 $a_4=$ ()
A. 2 B. 6 C. 12 D. 20

2. [2025·福建福州模拟] 已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$, $b_n-b_{n-1}=2n(n\geq 2)$, 若 $b_n<25$, 则满足条件的 n 的集合为 ()
A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$
C. $\{2, 3, 4\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, 则 $a_n=$ ()
A. $4+\frac{1}{n}$ B. $4-\frac{1}{n}$
C. $2+\frac{1}{n}$ D. $2-\frac{1}{n}$

4. [2025·沈阳模拟] 若数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$, $b_n=a_{n+1}-n+1$, $b_{n+1}=a_n-n+3$, 则数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前50项和为 ()
A. 2500 B. 2525
C. 2550 D. 3000

5. [2025·昆明一模] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$, 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$, $b_{n+1}=a_n+b_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 ()
A. $b_n=2^{n-1}+1$ B. $b_n=2^n+1$
C. $b_n=2^{n-1}-1$ D. $b_n=2^n-1$

6. [2025·浙江宁波三模] 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2=1$, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $2S_n=na_n$, 则 a_{2025} 的值为 ()
A. 2023 B. 2024
C. 2025 D. 2026

7. 对任意正整数 n 有 $a_{n+1}+2a_n=3n-2$, 且 $a_{n+1}-a_n>0$, 则这样的 $\{a_n\}$ 的个数是 ()
A. 0 B. 1
C. 2 D. 无穷多

二、多项选择题

8. [2025·南昌三模] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 数列 $\{a_n+3\}$ 的前 n 项积为 T_n , $a_1=1$, $a_{n+1}-a_n=2^{n+1}$, 则 ()
A. $a_3=12$ B. $a_n=2^{n+1}-3$
C. $S_5=109$ D. $T_n=2^{\frac{n(n+3)}{2}}$

9. [2025·石家庄模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=5a_n-4a_{n-1}(n\geq 2)$, $a_1=1$, $a_2=13$, 则 ()
A. a_{16} 的个位上的数字为3
B. a_{25} 的个位上的数字为1
C. 对任意实数 λ , 数列 $\{a_n+\lambda\}$ 都不是等比数列
D. $\{a_n\}$ 的前100项和大于 $\{2^n\}$ 的前200项和

三、填空题

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $(n-1)a_n=n\cdot 2^n a_{n-1}(n\in\mathbf{N}^*, n\geq 2)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

11. [2025·银川模拟] 已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n-2n+3$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=$ _____.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1=1$, $a_{n+1}=2S_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

四、解答题

13. [2025·河南驻马店模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_n \neq 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $S_n = a_n a_{n+1}$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $b_1 = 1$, 且 $b_{n+1} + b_n = 4a_{n+1}^2$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

14. [2025·昆明模拟] 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n+2} = 5S_{n+1} - 8S_n + 4S_{n-1}$, 已知 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 12$.

(1)证明: 数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 为等比数列;

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

1. [2024·全国甲卷] 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $2S_n=3a_{n+1}-3$.
- (1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2)求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式.
2. [2025·云南昭通模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,且 $a_{2n}=2a_n+1$,数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,且 $T_n=2^n-1, a_2=2b_2-1$.
- (1)求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2)求数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 Q_n .
3. [2025·兰州模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $a_1=3, S_{n+1}=S_n+a_n+2n+3$.
- (1)求 a_2, a_3, a_4 ;
- (2)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (3)若 $b_n=\frac{1}{a_n}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

4. [2025·河北秦皇岛模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足
 $a_1=1, a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2, n \text{ 为奇数}, \\ 2a_n, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 记 $b_n=a_{2n}$.

- (1) 求证: 数列 $\{b_n+2\}$ 是等比数列;
 (2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 (3) 求 T_{20} .

5. [2025·西安模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,
 $a_n=3a_{n-1}+4(n\geq 2)$. 设 $b_n=\log_3(a_n+2)$.

- (1) 求证数列 $\{a_n+2\}$ 是等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

- (2) 设 $c_n=\frac{3^{b_n}}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 若对任意正整数 n , 不等式 $c_n \leq \lambda$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

6. [2025·天津河西区模拟] 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_4-a_2=12, S_4+2S_2=3S_3$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1), n \in \mathbf{N}^*$, 且 $b_1=1$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

- (2) 设 $c_n=\begin{cases} \frac{\log_2 a_n}{n^2(n+2)}, n \text{ 为奇数}, \\ \frac{2\sqrt{b_n}}{a_n}, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ T_n 为 $\{c_n\}$ 的前 n

项和, 求 T_{2n} .

一、单项选择题

- [2023·天津卷] 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_{n+1}=2S_n+2$,则 a_4 的值为 ()
A. 3 B. 18
C. 54 D. 152
- [2025·山东德州三模] 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_2=4$, $S_5=3a_4+6$,则 $a_8=$ ()
A. 2 B. 8
C. 16 D. 32
- [2025·广东惠州模拟] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$,公差 $d=12$,在 $\{a_n\}$ 中每相邻两项之间都插入3个数,组成一个新的等差数列 $\{b_n\}$,则 $b_n=$ ()
A. $4n-2$ B. $3n-1$
C. $3n$ D. $2n+1$
- [2025·海南海口模拟] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_5=25$, $S_9=27$,则 $S_{10}=$ ()
A. 25 B. 26
C. 27 D. 28
- [2025·辽宁大连三模] 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $S_4=2S_3-S_2+6$, $a_2=1$,则 $a_5=$ ()
A. 16 B. 32
C. 27 D. 81
- 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为0,设 S_n 为其前 n 项和,若 $S_{25}=0$,则集合 $\{x|x=S_k, k=1,2,\dots,2025\}$ 中元素的个数为 ()
A. 2025 B. 2023
C. 2021 D. 2013
- [2025·重庆江北区模拟] 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $S_n=2a_n-4$,若 $\lambda a_n \geq 2\log_2 a_n + 1$ 对任意的正整数 n 恒成立,则实数 λ 的最小值为 ()
A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{1}{2}$
- [2025·哈尔滨三模] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{3}$, $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{a_n+n}$,若 $a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\dots+a_1a_2\dots a_n \leq \frac{3}{4}$,则 n 的最大值为 ()
A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

二、多项选择题

- [2025·甘肃庆阳三模] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为0, a_1,a_2,a_5 成等比数列,且 $a_{2n}=2a_n+1$,则下列说法正确的是 ()
A. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+1$
B. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$
C. $a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2n-1}=2n^2-n$
D. $a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2n-1}=2n^2+n-1$
- [2025·甘肃甘南州模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n=3a_na_{n+1}+2a_{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$),则下列结论正确的是 ()
A. 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等比数列
B. $a_{11}=\frac{1}{4092}$
C. 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为递增数列
D. 设数列 $\{\frac{1}{a_n}+3\}$ 的前 n 项和为 T_n ,则 $T_6=252$
- [2025·广东广州模拟] 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=-\frac{1}{2^n}+t$, $t \in \mathbf{R}$, $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n ,则 ()
A. $t=1$
B. $a_n=\frac{1}{2^n}$
C. $T_n=\frac{1}{(\sqrt{2})^{n(n-1)}}$
D. 数列 $\{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}\}$ 是等比数列

三、填空题

- [2025·辽宁锦州三模] 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列,其首项 $a_1=2$,公差 $d>0$,前 n 项和为 S_n ,若 a_1,a_2,a_5 成等比数列,则 $S_8=$ _____.
- [2025·长沙模拟] 记等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $a_n>0$, $S_3=3$, $S_{12}=65S_6$,则 $S_9=$ _____.
- [2025·辽宁大连三模] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\frac{S_n}{n} > \frac{S_{n+1}}{n+1}$,且 $a_6a_7<0$,则 S_n 取最大值时 n 的值为_____.

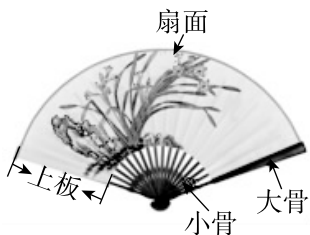
四、解答题

15. [2025·邵阳模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=5$,
 $a_{n+1}-2a_n=3^n (n \in \mathbf{N}^*)$, 记 $b_n=a_n-3^n$.
- (1) 求证: $\{b_n\}$ 是等比数列;
- (2) 设 $c_n=\frac{2n+1}{b_n}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若
 不等式 $(-1)^n \lambda < S_n + \frac{n}{2^{n-1}}$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

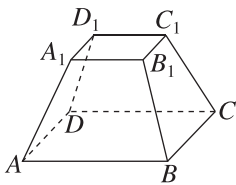
16. [2025·河北邢台三模] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=$
 $1, a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n+n-1, n \text{ 为奇数}, \\ a_n-\frac{1}{2}n, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 记 $b_n=a_{2n}$.
- (1) 证明数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 $c_n=\frac{\log_2 b_{2n-1}}{b_n}$, S_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和,
 证明: $\frac{1}{2} \leq S_n < 3$.

一、单项选择题

1. [2025·广东惠州模拟] 已知圆锥的侧面积为 2π , 它的侧面展开图是一个半圆, 则此圆锥的高为 ()
- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
C. 2 D. 3
2. [2023·全国甲卷] 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $PA=PB=2$, $PC=\sqrt{6}$, 则该三棱锥的体积为 ()
- A. 1 B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. 3
3. [2025·安徽滁州一模] 现有一把折扇, 其结构如图, 完全展开后扇面的圆心角为 $\frac{2}{3}\pi$, 上板长为 16 cm. 若把该扇面围成一个圆台, 则圆台的高为 ()



- A. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$ cm B. $10\sqrt{2}$ cm
C. $10\sqrt{3}$ cm D. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ cm
4. [2025·长沙模拟] 如图, 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=4$, $A_1B_1=2$, 侧棱与底面所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, 则此正四棱台外接球的表面积为 ()
- A. 8π B. 16π
C. 32π D. 64π
5. [2025·南昌模拟] 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 3 m^3 , 侧面积为 2 m^2 , 底面积为 1 m^2 , 则这个正三棱锥内切球的体积为 ()
- A. $36\pi\text{ m}^3$ B. $12\pi\text{ m}^3$
C. $108\pi\text{ m}^3$ D. $\frac{4}{3}\pi\text{ m}^3$



6. [2025·北京大兴区三模] 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $EF \parallel$ 平面 $ABCD$, $EF=2$, 其余棱长都为 1, 则这个五面体的体积为 ()
- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$
C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
7. [2025·云南昭通模拟] 已知球 O 的半径为 3, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有顶点均在球面上, 点 M 是棱 AB 的中点, 过点 M 作球 O 的截面, 则所得截面面积的最小值为 ()
- A. 5π B. 4π C. 3π D. $\sqrt{3}\pi$

二、多项选择题

8. [2025·河北邢台三模] 若圆锥 SO 的底面半径为 1, 母线长为 3, 则下列关于此圆锥的说法正确的是 ()
- A. 圆锥 SO 的侧面展开图的圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$
B. 圆锥 SO 的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$
C. 过圆锥 SO 的两条母线作截面, 则截面面积的最大值为 $\frac{9}{2}$
D. A 为圆锥 SO 底面圆周上一点, P 为 SA 上靠近 S 的三等分点, 则从点 A 出发绕圆锥 SO 的侧面一周回到点 P 的无弹性细绳的最短长度为 $\sqrt{13}$
9. [2025·南京三模] 已知在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $AA_1=BC=1$, $AC=\sqrt{3}$, O 为该三棱柱外接球的球心, 则 ()
- A. 直线 AC_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$
B. 球 O 的体积为 $\frac{4\pi}{3}$
C. 半径为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 的球可以放入该三棱柱的内部
D. 球 O 被平面 AB_1C 截得的截面圆的面积为 $\frac{9\pi}{10}$

三、填空题

10. 正四面体的内切球与外接球的表面积之比为 _____.